



Ce document a été mis en ligne par l'organisme [FormaV®](#)

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :

www.formav.co/explorer

B.T.S. Groupement C MATHEMATIQUES
Session 2011

Correction

	Questions	Réponses	Barème																			
Exercice 1	A.1	$f(x) = (Ax + B)e^{-x}$, A et B constantes réelles	1,5																			
	A.2.	$b = 2$	1,5																			
	A.3.	$f(x) = (Ax + B)e^{-x} + 2$, A et B constantes réelles	1																			
	A.4.	$f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 2$	1																			
	B.1.	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	0,5																			
	B.2.a.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$	0,5																			
	B.2.b.	Asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 2$.	0,5																			
	B.2.c.	Tracé en annexe de l'asymptote	0,5																			
	B.3.a.	$f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$	1																			
	B.3.b.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0,5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$(1 - 2x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>e^{-x}</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>f</td><td>$-\infty$</td><td>$2 + 2e^{-0,5}$</td><td>2</td></tr></table>	x	$-\infty$	0,5	$+\infty$	$(1 - 2x)$	+	0	-	e^{-x}	+		+	$f'(x)$	+	0	-	f	$-\infty$	$2 + 2e^{-0,5}$	2
x	$-\infty$	0,5	$+\infty$																			
$(1 - 2x)$	+	0	-																			
e^{-x}	+		+																			
$f'(x)$	+	0	-																			
f	$-\infty$	$2 + 2e^{-0,5}$	2																			
B.4.a	$F'(x) = (2x + 1)e^{-x} + 2 = f(x)$	1																				
B.4.b	$A = 4 \int_0^2 f(x) dx = 4[F(2) - F(0)] = 28(1 - e^{-2}) \text{ cm}^2$. D'où $A \approx 24,21 \text{ cm}^2$.	1																				
Exercice 2	A.	$P(237,18 \leq X \leq 238,82) \approx 0,959$	1																			
	B.1.	Un prélèvement est constitué de 50 épreuves identiques et indépendantes. Y_1 suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,04$.	1																			
	B.2.	$P(Y_1 = 0) = 0,96^{50} \approx 0,13$	1																			
	B.3.a.	Y_2 qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$	1																			
	B.3.b.	$P(Y_2 \leq 3) \approx 0,857$	1																			
	C.1.	L'hypothèse alternative H_1 : « $\mu \neq 238$ ».	1																			
	C.2.	$h \approx 0,118$	1																			
	C.3.	On prélève un échantillon de 45 disques et on calcule la moyenne de leurs diamètres. • Si cette moyenne est dans l'intervalle $[237,882 ; 238,118]$, on accepte H_0 au seuil de risque de 5 %. • Si cette moyenne n'est pas dans l'intervalle $[237,882 ; 238,118]$, on rejette H_0 au seuil de risque de 5 % et on accepte H_1 .	1																			
	C.4.	Oui car $\bar{z} = 237,91 \in [237,882 ; 238,118]$.	1																			

Exercice 1

Partie A

1. $(E_0): y'' + 2y' + y = 0.$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1.$$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = (Ax + B)e^{-x}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles.}$$

2. $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = b$ donc $g'(x) = g''(x) = 0.$

$$g \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 2 \Leftrightarrow b = 2.$$

Donc $b = 2.$ 3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = (Ax + B)e^{-x} + 2, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles.}$$

4. Soit f une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbf{R}$. $f(x) = (Ax + B)e^{-x} + 2.$

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-\frac{1}{2}) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + 2 = 3 \\ -\frac{A}{2} + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 2B = 2 \end{cases}. \text{ Donc } f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 2.$$

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 2.$

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

2. a. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2.$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

b. On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale D à C en $+\infty$ d'équation $y = 2.$

c. Tracé de la droite en annexe.

3. a. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $\mathbf{R}$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1)(-e^{-x}) + 0 = (2 - 2x - 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}.$$

b.

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
$(1 - 2x)$	+	0	-
e^{-x}	+		+
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$2 + 2e^{-0,5}$	2

4. Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 2x$.

a. $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = -2e^{-x} + (-2x - 3)(-e^{-x}) + 2 = (-2 + 2x + 3)e^{-x} + 2 = (2x + 1)e^{-x} + 2 = f(x)$.

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbf{R}$.

b. f est positive sur $[0 ; 2]$ et une unité graphique représente 2 cm donc une unité d'aire représente 4 cm². On en déduit l'aire A , en cm² :

$$A = 4 \int_0^2 f(x) dx = 4 [F(2) - F(0)] = 4 [-7e^{-2} + 4 - (-3)] = 28(1 - e^{-2}) \text{ cm}^2.$$

D'où $A \approx 24,21 \text{ cm}^2$.

Exercice 2

Partie A

La probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit conforme pour son diamètre est égale à $P(237,18 \leq X \leq 238,82)$.

X suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,4 donc la variable aléatoire $T = \frac{X - 238}{0,4}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$P(237,18 \leq X \leq 238,82) \approx 0,959$$

Partie B

1. Un prélèvement est constitué de 25 épreuves élémentaires, identiques et indépendantes puisque le prélèvement est associé à un tirage avec remise. Chaque épreuve peut déboucher sur deux issues, disque conforme ou non. Y_1 le nombre de tirages donnant un disque non-conforme donc Y_1 suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,04$.

2. La probabilité que tous les disques du lot prélevé aient un diamètre conforme est $P(Y_1 = 0)$.

$$P(Y_1 = 0) = 0,96^{25} \approx 0,36.$$

3. a. Y_2 qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 25 \times 0,04 = 1$.

4.

b. La probabilité que le lot prélevé ait au plus 3 disques non-conformes est $P(Y_2 \leq 3)$.

$$P(Y_2 \leq 3) = P(Y_2 = 0) + P(Y_2 = 1) + P(Y_2 = 2) + P(Y_2 = 3) \approx 0,368 + 0,368 + 0,184 + 0,061 \approx 0,981.$$

Partie C

1. L'hypothèse alternative H_1 est « $\mu \neq 238$ ».

2. La variable aléatoire $\bar{T} = \frac{\bar{Z} - 238}{0,06}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$P(238 - h \leq \bar{Z} \leq 238 + h) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0,06} \leq \bar{T} \leq \frac{h}{0,06}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0,06}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0,06}\right) = 0,975.$$

$$\text{D'où } \frac{h}{0,06} \approx 1,96 \text{ soit } h \approx 0,118.$$

3. La règle de décision du test est :

On prélève un échantillon de 45 disques et on calcule la moyenne de leurs diamètres.

- Si cette moyenne est dans l'intervalle $[237,882 ; 238,118]$, on accepte H_0 au seuil de risque de 5 %.
- Si cette moyenne n'est pas dans l'intervalle $[237,882 ; 238,118]$, on rejette H_0 au seuil de risque de 5 % et on accepte H_1 .

4. Oui car $\bar{z} = 237,91 \in [237,882 ; 238,118]$.

Annexe (à rendre avec la copie)

