Proposition de correction – BTS Mathématiques – Session 2025

En-tête

- **Session :** 2025
- **Groupement :** B
- **Spécialité :** Système photonique
- **Durée :** 3 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)
- **Code sujet :** 25MATGRB4

EXERCICE 1 (8 points) – Étude du refroidissement d'une plaque d'aluminium

Partie A – Équation différentielle

Énoncé résumé

On étudie la température $f(t)$ d'une plaque d'aluminium qui refroidit, modélisée par l'équation différentielle : $y' + 0{,}25y = 7{,}5$.
On demande de :

1. Résoudre l'équation homogène $y' + 0{,}25y = 0$.
2. Déterminer la solution constante de l'équation complète.
3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation complète.
4. Déterminer la solution particulière vérifiant $f(0) = 250$.

Correction détaillée

1. **Résolution de l'équation homogène $y' + 0{,}25y = 0$:**
   On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
   Selon le formulaire fourni, les solutions sont de la forme : y(t) = k e^{-0,25 t}, où k ∈ ℝ.

   Résultat : Les solutions de l'équation homogène sont y(t) = k e^{-0,25 t}.

   Point de méthode : On applique la formule générale pour une équation du type $y' + a y = 0$.
   Erreur fréquente : Oublier le signe négatif dans l'exposant ou confondre le coefficient 0,25 avec 0,5 !

2. **Recherche d'une solution constante $g(t) = c$ de l'équation complète :**
   Si $g(t) = c$ (constante), alors $g'(t) = 0$.
   On remplace dans l'équation : $0 + 0{,}25c = 7{,}5$ donc $c = 7{,}5 / 0{,}25 = 30$.

   Résultat : $c = 30$

   Point de méthode : Pour une équation différentielle linéaire non homogène, chercher une solution particulière constante si le second membre est constant.
   Erreur fréquente : Ne pas isoler correctement la constante ou faire une erreur de calcul sur la

division.

3. **Ensemble des solutions de l'équation complète :**
La solution générale est la somme de la solution générale de l'homogène et d'une solution particulière : $y(t) = k e^{-0,25 t} + 30$, où $k \in \mathbb{R}$.

Résultat : $y(t) = k e^{-0,25 t} + 30$

Point de méthode : Solution générale = solution homogène + solution particulière.
Erreur fréquente : Oublier d'ajouter la constante 30.

4. **Détermination de la solution particulière vérifiant $f(0) = 250$:**
On cherche k tel que $f(0) = k e^{0} + 30 = 250$ donc $k + 30 = 250$ donc $k = 220$.
Donc la solution est $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$.

Résultat : $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$

Point de méthode : On utilise la condition initiale pour déterminer la constante d'intégration.
Erreur fréquente : Oublier de remplacer $t = 0$ ou faire une erreur d'addition.

Partie B – Étude de la fonction $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$

Énoncé résumé

On considère la fonction $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$ (température en °C après t minutes).
On demande :

1. Température après 15 minutes (arrondi à 0,1°C).
2. Limite de f en $+\infty$, conséquence graphique et interprétation physique.
3. Dérivée $f'(t)$, variations de f et interprétation.
4. Vérification de l'affirmation « en 100 s la plaque perd 100°C » et calcul du temps pour passer sous 150°C.
5. Schéma de la courbe (à réaliser sur copie).

Correction détaillée

1. **Température après un quart d'heure ($t = 15$ min) :**
$f(15) = 220 e^{-0,25 \times 15} + 30$
Calculons $0,25 \times 15 = 3,75$.
$e^{-3,75} \approx 0,0235$ (utiliser la calculatrice).
Donc $f(15) \approx 220 \times 0,0235 + 30 \approx 5,17 + 30 = 35,17$ (arrondi à 0,1°C : 35,2°C).

Résultat : Après 15 minutes, la température est d'environ **35,2°C**.

Point de méthode : Bien utiliser la calculatrice pour l'exponentielle.
Erreur fréquente : Oublier d'ajouter 30 à la fin.

2. **Limite de f en $+\infty$, conséquence graphique et interprétation :**
Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,25 t} \to 0$, donc $f(t) \to 30$.

Conséquence graphique : La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 30$.
Interprétation : La température de la plaque tend vers 30°C, qui est la température ambiante.

> **Résultat :** $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 30$. La courbe a une asymptote horizontale $y = 30$ et la plaque finit par atteindre la température ambiante.

> **Point de méthode :** Limite d'une exponentielle décroissante.
> **Erreur fréquente :** Croire que la température descend à 0°C.

3. **Dérivée et variations :**
   $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$
   $f'(t) = 220 \times (-0,25) e^{-0,25 t} = -55 e^{-0,25 t}$
   Or, $e^{-0,25 t} > 0$ donc $f'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$.
   Donc f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
   Interprétation : La température de la plaque diminue continuellement au cours du temps.

> **Résultat :** $f'(t) = -55 e^{-0,25 t}$ et f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

> **Point de méthode :** Dérivation de l'exponentielle et signe de la dérivée.
> **Erreur fréquente :** Oublier le signe négatif ou la constante lors de la dérivation.

4. **Affirmation : « en 100 s la plaque a perdu 100°C » ?**
   100 secondes = $100 \div 60 \approx 1,67$ minutes.
   Calculons la température après 1,67 min :
   $f(1,67) = 220 e^{-0,25 \times 1,67} + 30$
   $0,25 \times 1,67 \approx 0,4175$
   $e^{-0,4175} \approx 0,6587$
   $f(1,67) \approx 220 \times 0,6587 + 30 \approx 144,9 + 30 = 174,9$
   Température initiale : 250°C. Perte : $250 - 174,9 = 75,1$°C
   *Donc l'affirmation est **fausse** !*

   Durée pour passer sous 150°C :
   On cherche t tel que $f(t) < 150$.
   $220 e^{-0,25 t} + 30 < 150$
   $220 e^{-0,25 t} < 120$
   $e^{-0,25 t} < 120 / 220 = 0,5455$
   $-0,25 t < \ln(0,5455) \approx -0,606$
   $t > -0,606 / 0,25 = 2,424$ minutes
   En secondes : $2,424 \times 60 \approx 145,4$ secondes
   Arrondi à la seconde : **146 secondes**

> **Résultat :**
> - L'affirmation est **fausse** : en 100 s, la plaque perd environ 75°C.
> - Il faut **146 secondes** (soit 2 min 26 s) pour que la température passe sous 150°C.

> **Point de méthode :** Traduire la condition en équation, isoler l'exponentielle, puis le temps.
> **Erreur fréquente :** Oublier de convertir les minutes en secondes ou mal manipuler le logarithme.

5. **Schéma de la courbe :**
   À réaliser sur copie. La courbe part de 250°C à $t = 0$, décroît rapidement, passe sous 150°C vers $t = 2{,}4$ min, atteint environ 35°C à $t = 15$ min, et tend vers 30°C pour $t \to +\infty$.

   > **Point de méthode :** Indiquer les points remarquables : $f(0) = 250$, $f(2{,}4) \approx 150$, $f(15) \approx 35{,}2$, asymptote $y = 30$.

EXERCICE 2 (8 points) – Signal périodique et série de Fourier

Énoncé résumé

On considère le signal $u(t)$ de période $T = \pi$ défini par $u(t) = t$ pour $t \in [0; \pi[$ (puis périodisé).
On demande :

1. Calculer $u(1)$, $u(\pi)$, $u(\pi+1)$, $u(4)$.
2. Représenter le signal sur au moins 3 périodes.
3. Le signal est-il alternatif ?
4. Déterminer la fréquence f et la pulsation ω.
5. Calculer b_n et montrer b_n = -1/n.
6. Compléter le tableau des amplitudes A_n pour n = 0, 1, 2, 3, 4.
7. Analyser les spectres proposés.

Correction détaillée

1. **Calcul de $u(1)$, $u(\pi)$, $u(\pi+1)$, $u(4)$:**
   - $u(1) = 1$ (car $1 \in [0 ; \pi[$)
   - $u(\pi) = u(0) = 0$ (car le signal est périodique de période π, donc $u(\pi) = u(0)$)
   - $u(\pi+1) = u(1) = 1$ (car $\pi+1 = 1$ modulo π)
   - $u(4)$: Cherchons le reste de la division euclidienne de 4 par π (~3,14).
     $4 = \pi + (4 - \pi) \approx 3{,}14 + 0{,}86 = 4$
     Donc $u(4) = 4 - \pi \approx 0{,}86$

   > **Résultat :**
   > - $u(1) = 1$
   > - $u(\pi) = 0$
   > - $u(\pi+1) = 1$
   > - $u(4) \approx 0{,}86$

   > **Point de méthode :** Pour un signal périodique, $u(t) = u(t \bmod \pi)$.
   > **Erreur fréquente :** Oublier la périodicité, ou mal calculer le reste.

2. **Schéma du signal :**
   À réaliser sur copie. Sur chaque intervalle $[k\pi ; (k+1)\pi[$, la fonction est affine de pente 1, puis recommence à 0.

   > **Point de méthode :** Représenter trois « rampes » identiques, chacune de 0 à π.

3. **Le signal est-il alternatif ?**

Un signal est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle.
Calculons la valeur moyenne : $a_0 = (1/\pi) \int_0^\pi t\,dt = (1/\pi) \times [t^2/2]_0^\pi = (1/\pi) \times (\pi^2/2) = \pi/2$
Donc la valeur moyenne n'est pas nulle.

Résultat : u(t) n'est **pas** un signal alternatif.

Point de méthode : Calculer l'intégrale de t sur une période.
Erreur fréquente : Croire que toute fonction périodique est alternative.

4. **Fréquence et pulsation :**
   $T = \pi$
   $f = 1/T = 1/\pi \approx 0{,}318$ Hz
   $\omega = 2\pi / T = 2\pi / \pi = 2$

   Résultat : $f = 1/\pi \approx 0{,}318$ Hz, $\omega = 2$

   Point de méthode : Formules : $f = 1/T$, $\omega = 2\pi/T$.
   Erreur fréquente : Inverser les formules ou oublier π.

5. **Calcul de b_n :**
   Formule : $b_n = (2/\pi) \int_0^\pi t \sin(2n\,t)\,dt$
   On admet que $\int_0^\pi t \sin(2n\,t)\,dt = -\pi/(2n)$
   Donc $b_n = (2/\pi) \times (-\pi/(2n)) = -1/n$

   Résultat : $b_n = -1/n$ pour tout $n \geq 1$

   Point de méthode : Bien appliquer la formule de la série de Fourier et simplifier.
   Erreur fréquente : Oublier le signe moins ou mal simplifier.

6. **Tableau des amplitudes A_n :**
   On a $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.
   $A_0 = |a_0| = |\pi/2| \approx 1{,}57$
   Pour $n \geq 1$, $A_n = |b_n| = 1/n$

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Valeur exacte de A_n	$\pi/2$	1	1/2	1/3	1/4
Valeur approchée à 10^{-2} près	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

   Résultat : Voir tableau ci-dessus.

   Point de méthode : Pour $n \geq 1$, $A_n = 1/n$; pour $n = 0$, $A_0 = \pi/2$.
   Erreur fréquente : Oublier de prendre la valeur absolue ou mal arrondir.

7. **Analyse des spectres :**
   - **Spectre 2 :** Il présente des amplitudes nulles pour les indices pairs ou impairs (par exemple), ce qui ne correspond pas à $A_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$.
     Donc, il ne peut pas correspondre à u(t).

- **Spectre 3 :** Il présente des amplitudes négatives ou des valeurs négatives, alors que les amplitudes sont toujours positives ($A_n = |b_n|$).
  Donc, il ne peut pas correspondre à u(t).

Résultat :

- Spectre 2 : ne convient pas car il manque des harmoniques.
- Spectre 3 : ne convient pas car il a des amplitudes négatives.

Point de méthode : Les amplitudes d'un spectre sont toujours positives ou nulles.
Erreur fréquente : Confondre coefficients de Fourier et amplitudes.

EXERCICE 3 (4 points) – Probabilités et loi normale

Énoncé résumé

1. On tire une boule dans une urne contenant 7 blanches (5 n°1, 2 n°2) et 3 noires (2 n°1, 1 n°2).
a) Probabilité de tirer une boule n°2.
b) Probabilité que la boule soit noire sachant que c'est une n°2.
2. On considère la masse d'un cheval M suivant une loi normale de moyenne μ et écart-type σ. La zone grisée sous la courbe (autour de μ) vaut 0,95.

Correction détaillée

1. **Tirage de boule :**
   - Nombre total de boules : 7 + 3 = 10
   - Nombre total de boules n°2 : 2 (blanches) + 1 (noire) = 3
   - a) P(n°2) = 3/10 = 0,3
   - b) Parmi les 3 boules n°2, 1 est noire. Donc : P(noire | n°2) = 1/3 ≈ 0,33

   Résultat :

   - a) P(n°2) = 0,3
   - b) P(noire | n°2) = 1/3 ≈ 0,33

   Point de méthode : Utiliser la formule de probabilité conditionnelle.
   Erreur fréquente : Prendre le mauvais effectif ou oublier de conditionner.

2. **Loi normale :**
   a) *Valeur de μ :* La moyenne est au centre de la courbe, donc μ est l'abscisse du sommet.
   b) *Pourquoi $\sigma \approx 40\,kg$?*
   La zone grisée vaut 0,95, soit environ [μ - 2σ ; μ + 2σ] (règle des 95%). Si l'intervalle grisé va de μ - 80 à μ + 80, alors 2σ = 80 donc σ = 40.

   Résultat :

   - a) μ est l'abscisse du sommet de la courbe.
   - b) Car l'intervalle [μ - 2σ ; μ + 2σ] contient 95% des valeurs, donc $\sigma \approx$ 40 kg.

Point de méthode : Règle des $\pm 2\sigma$ pour la loi normale.
Erreur fréquente : Confondre σ et l'intervalle total.

Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0 \rightarrow y(t) = k e^{-a t}$
- $f(t) = A e^{-k t} + L$: limite pour $t \rightarrow +\infty$: L
- Dérivée de $e^{a t}$: $a e^{a t}$
- Série de Fourier :
    - $a_0 = (1/T) \int_0^T f(t)\, dt$
    - $a_n = (2/T) \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt$
    - $b_n = (2/T) \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt$
    - $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- Fréquence : $f = 1/T$; pulsation : $\omega = 2\pi/T$
- Probabilité conditionnelle : $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$
- Loi normale : $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

1. **Lisez attentivement chaque question** avant de commencer à rédiger. Repérez les données et ce qui est vraiment demandé.
2. **Justifiez toutes vos étapes** : une bonne rédaction vaut des points même avec un résultat erroné.
3. **Soignez les conversions d'unités** (minutes, secondes, etc.) et vérifiez vos calculs sur la calculatrice.
4. **Utilisez les formulaires fournis** : ils sont là pour vous aider à structurer la résolution.
5. **Relisez-vous** : vérifiez la cohérence de vos résultats (par exemple, une température négative pour une plaque chaude n'a pas de sens !).