BTS – SESSION 2025 – Groupement D1

Mathématiques – Proposition de correction détaillée

Durée : 2 heures

Calculatrice : Autorisée (mode examen actif ou type collège)

Spécialités concernées : Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, Biotechnologies, Europlastics et composites, Bioqualité

EXERCICE 1 (11 points)

Énoncé résumé

On étudie l'évolution de la concentration en dioxygène dans le bassin d'aération d'une station d'épuration, à partir de mesures expérimentales et de modélisations mathématiques (ajustement, équation différentielle, interprétation physique).

Partie A

1. **Pourquoi un ajustement linéaire n'est-il pas approprié ?**

Le nuage de points $(t_i ; C_i)$ montre que la concentration en dioxygène augmente rapidement au début, puis la croissance ralentit et la courbe semble tendre vers une valeur limite (saturation). La forme du nuage n'est donc pas alignée mais suit une courbe qui s'infléchit.

Un ajustement linéaire n'est pas approprié car la croissance de la concentration en dioxygène n'est pas constante : elle ralentit et tend vers une valeur limite, ce qui évoque une évolution exponentielle ou logistique, pas linéaire.

Méthode : Reconnaître la forme d'une courbe sur un graphique : une droite correspond à une croissance constante, une courbe qui s'infléchit vers une asymptote évoque une exponentielle ou une logistique.
Erreur fréquente : Croire que tout nuage de points peut être ajusté par une droite.

2. **Calcul des valeurs manquantes u et v dans le tableau de $\ln(10{,}54 – C_i)$**

On a : $y = \ln(10{,}54 – C)$, donc pour chaque t_i, $y_i = \ln(10{,}54 – C_i)$.

- Pour t = 8 min, C = 7,063 mg/L.
  10,54 – 7,063 = 3,477
  $u = \ln(3{,}477) \approx 1{,}247$ (arrondi à 10^{-3} près)
- Pour t = 16 min, C = 9,215 mg/L.
  10,54 – 9,215 = 1,325
  $v = \ln(1{,}325) \approx 0{,}281$ (arrondi à 10^{-3} près)

<u>Valeurs manquantes :</u>
u = 1,247 ; v = 0,281

Méthode : Remplacer C_i dans la formule $y = \ln(10{,}54 – C_i)$.
Erreur fréquente : Oublier de faire la soustraction avant de prendre le logarithme.

3. **Ajustement affine du nuage (t; y) par la méthode des moindres carrés**

On cherche une équation de la droite d'ajustement sous la forme $y = a\,t + b$.
À l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), on trouve généralement :

- $a \approx -0{,}14$ (à 10^{-2} près)
- $b \approx 2{,}35$ (à 10^{-2} près)

Équation de la droite d'ajustement : $y = -0{,}14\,t + 2{,}35$

Méthode : Utiliser la fonction « régression linéaire » de la calculatrice ou d'un tableur sur (t; y).
Erreur fréquente : Oublier de prendre les valeurs $y = \ln(10{,}54 - C)$ et non C directement.

4. **Expression de C(t) en fonction du temps**

On a $y = \ln(10{,}54 - C) \approx -0{,}14\,t + 2{,}35$.
On souhaite exprimer C(t) en fonction de t.

- $\ln(10{,}54 - C) = -0{,}14\,t + 2{,}35$
- $10{,}54 - C = \exp(-0{,}14\,t + 2{,}35) = \exp(2{,}35) \times \exp(-0{,}14\,t)$
- $C = 10{,}54 - \exp(2{,}35) \times \exp(-0{,}14\,t)$
- $\exp(2{,}35) \approx 10{,}48$ (arrondi à 10^{-2} près)
- Donc : $C(t) = 10{,}54 - 10{,}48 \times e^{-0{,}14\,t}$

On peut aussi écrire : $C(t) = 10{,}54 \times (1 - A\,e^{-0{,}14\,t})$ avec $A = 10{,}48 / 10{,}54 \approx 0{,}995$ (arrondi à 10^{-3} près)

$C(t) = 10{,}54 \times (1 - 0{,}995\,e^{-0{,}14\,t})$

Méthode : Manipuler les équations exponentielles et logarithmiques pour isoler C(t).
Erreur fréquente : Oublier de transformer $\ln(10{,}54 - C)$ en $10{,}54 - C$ par l'exponentielle.

Partie B

1. **1.a. Solutions de l'équation différentielle $y' + r\,y = 0$**

Cette équation est linéaire du premier ordre à coefficients constants. L'ensemble des solutions est :

- $y(t) = K\,e^{-r\,t}$, où K est une constante réelle.

Ensemble des solutions : $y(t) = K\,e^{-r\,t}$

2. **1.b. Vérification que $g(t) = 10{,}54$ est une solution particulière de $y' + r\,y = 10{,}54\,r$**

- $g'(t) = 0$
- $g'(t) + r\,g(t) = 0 + r \times 10{,}54 = 10{,}54\,r$

Oui, $g(t) = 10{,}54$ est solution particulière de l'équation différentielle.

3. **1.c. Ensemble des solutions de l'équation différentielle complète**

L'ensemble des solutions est la somme de la solution générale de l'homogène et d'une solution particulière :
$y(t) = K\,e^{-r\,t} + 10{,}54$

$y(t) = K\,e^{-r\,t} + 10{,}54$

4. **1.d. Expression de f(t) en tenant compte de $f(0) = 0$**

- $f(0) = K \times 1 + 10{,}54 = 0 \Rightarrow K = -10{,}54$
- Donc : $f(t) = 10{,}54 \times (1 - e^{-r\,t})$

$f(t) = 10{,}54 \times (1 - e^{-r\,t})$

Méthode : Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, appliquer la condition initiale.
Erreur fréquente : Oublier de prendre en compte la condition initiale pour déterminer la constante.

5. **2.a. Détermination de r à partir de AH = r × C × V**

- AH = 1000 g/min ; C = 0,01054 g/L ; V = 700 000 L
- $r = AH / (C \times V) = 1000 / (0{,}01054 \times 700\,000) \approx 0{,}135\ \text{min}^{-1}$

$r \approx 0{,}135\ \text{min}^{-1}$

6. **2.b. Cohérence avec la modélisation de la partie A**

Dans la partie A, le coefficient devant t dans l'exponentielle est –0,14. Dans la partie B, r ≈ 0,135. Les deux valeurs sont très proches, ce qui montre la cohérence entre la modélisation expérimentale et la modélisation théorique.

Oui, les valeurs de r sont cohérentes (–0,14 ≈ –0,135).

Méthode : Comparer les paramètres des modèles exponentiels issus de différentes approches.
Erreur fréquente : Ne pas vérifier l'unité de r ou comparer des valeurs issues de modèles différents sans justification.

Partie C

1. **1.a. Limite de g(t) en +∞ et interprétation**

$g(t) = 4{,}77 \times (1 - e^{-0{,}066\,t})$
Quand $t \to \infty$, $e^{-0{,}066\,t} \to 0$, donc $g(t) \to 4{,}77$ mg/L.
Interprétation : 4,77 mg/L est la nouvelle concentration de saturation atteinte après remise en marche du système d'aération.

$\lim_{t\to\infty} g(t) = 4{,}77$ mg/L (valeur de saturation en dioxygène)

2. **1.b. Temps pour atteindre 90 % de la saturation (4,293 mg/L)**

On cherche t tel que $g(t) = 0{,}9 \times 4{,}77 = 4{,}293$ mg/L.
$g(t) = 4{,}77 \times (1 - e^{-0{,}066\,t}) = 4{,}293$
$1 - e^{-0{,}066\,t} = 4{,}293 / 4{,}77 \approx 0{,}9$
$e^{-0{,}066\,t} = 0{,}1$
$-0{,}066\,t = \ln(0{,}1) \approx -2{,}3026$
$t = 2{,}3026 / 0{,}066 \approx 34{,}89$ min

La concentration atteint 90 % de la saturation au bout d'environ **35 minutes**.

Méthode : Isoler l'exponentielle, prendre le logarithme, puis calculer t.

Erreur fréquente : Oublier de diviser par le coefficient devant t ou mal manipuler le logarithme.

3. **2.a. Vérification que $G(t) = 4,77\ t + 72,3\ e^{-0,066\ t}$ est une primitive de g(t)**

$G(t) = 4,77\ t + 72,3\ e^{-0,066\ t}$

$G'(t) = 4,77 - 72,3 \times 0,066\ e^{-0,066\ t} = 4,77 - 4,77\ e^{-0,066\ t} = 4,77\ (1 - e^{-0,066\ t}) = g(t)$

Oui, G est bien une primitive de g sur [0 ; ∞[.

4. **2.b. Concentration moyenne pendant les 25 premières minutes**

$C_{moy} = (1 / 25) \times \int_0^{25} g(t)\ dt = (1 / 25) \times [G(25) - G(0)]$

$G(25) = 4,77 \times 25 + 72,3 \times e^{-0,066 \times 25} \approx 119,25 + 72,3 \times e^{-1,65} \approx 119,25 + 72,3 \times 0,192 \approx 119,25 + 13,88 \approx 133,13$

$G(0) = 0 + 72,3 \times 1 = 72,3$

Donc :

$C_{moy} = (1 / 25) \times (133,13 - 72,3) \approx (1 / 25) \times 60,83 \approx 2,43$ mg/L (arrondi à 0,1 mg/L près)

Concentration moyenne ≈ **2,4 mg/L**

Méthode : Utiliser la primitive pour calculer une moyenne sur un intervalle.
Erreur fréquente : Oublier de soustraire G(0) ou de diviser par la durée.

EXERCICE 2 (9 points)

Énoncé résumé

On étudie le calibrage des ampoules pharmaceutiques selon deux dimensions (diamètre et hauteur), modélisées par des lois normales, puis la qualité d'un prélèvement de 50 ampoules (loi binomiale), et enfin un test statistique sur le volume moyen d'un échantillon.

Partie A

1. **1. Reconnaissance de la courbe de densité de D**

D suit une loi normale de moyenne 7,1 et d'écart type 0,24.
La courbe recherchée doit être centrée sur 7,1 et avoir une dispersion modérée. Parmi les courbes proposées, la courbe II est centrée sur 7,1 (milieu de l'axe horizontal).

La courbe II représente la densité de la variable aléatoire D.

Méthode : Repérer la moyenne (centre du pic) et l'étalement (écart type) sur une courbe normale.
Erreur fréquente : Confondre la courbe la plus « haute » avec la bonne, sans regarder la position du centre.

2. **2.a. Probabilité P(6,48 < D < 7,72)**

Standardisons :

$z_1 = (6,48 - 7,1) / 0,24 \approx -2,58$

$z_2 = (7,72 - 7,1) / 0,24 \approx 2,58$

$P(6,48 < D < 7,72) = P(-2,58 < Z < 2,58) \approx 0,990$ (lecture table normale)

P(6,48 < D < 7,72) ≈ **0,990**

3. **2.b. Probabilité P(100,6 < H < 104,1)**

Standardisons :
z_1 = (100,6 – 102) / 0,7 ≈ –2,00
z_2 = (104,1 – 102) / 0,7 ≈ 3,00
P(–2,00 < Z < 3,00) ≈ 0,977 (table normale)

P(100,6 < H < 104,1) ≈ **0,977**

Méthode : Standardiser, puis utiliser la table de la loi normale centrée réduite.
Erreur fréquente : Oublier de soustraire la moyenne ou de diviser par l'écart type.

4. **3. Probabilité qu'une ampoule soit correctement calibrée**

Les deux événements sont indépendants, donc on multiplie les probabilités : P = 0,990 × 0,977 ≈ 0,967

Probabilité ≈ **0,967**

Méthode : Pour des événements indépendants, la probabilité conjointe est le produit des probabilités.
Erreur fréquente : Additionner au lieu de multiplier.

Partie B

1. **1. Loi suivie par X et ses paramètres**

X : nombre d'ampoules correctement calibrées sur 50.
Chaque ampoule est un succès avec probabilité p = 0,97, tirage avec remise.
Donc X suit une loi binomiale B(n = 50, p = 0,97).

X ~ B(50 ; 0,97)

2. **2. Espérance de X et interprétation**

E(X) = n × p = 50 × 0,97 = 48,5
Interprétation : En moyenne, sur 50 ampoules, 48,5 sont correctement calibrées.

Espérance : **48,5** ampoules correctement calibrées

3. **3. Probabilité d'avoir au moins 4 ampoules non conformes**

Au moins 4 non conformes ⇔ au plus 46 conformes (car 50 – 46 = 4).
P(X ≤ 46) = ?
Mais la question demande : au moins 4 non conformes, donc X ≤ 46.
Utiliser la calculatrice (mode binomiale cumulée) :
P(X ≤ 46) ≈ 0,043 (arrondi à 10^{-2})

Probabilité ≈ **0,04**

Méthode : Utiliser la fonction de distribution cumulée de la binomiale sur la calculatrice.
Erreur fréquente : Confondre « au moins 4 non conformes » avec « au moins 4 conformes ».

Partie C

1. **1. Détermination de h tel que $P(10 – h < V < 10 + h) = 0{,}95$**

Sous H_0, $V \sim N(10 ; 0{,}03)$.
On cherche h tel que $P(–h/0{,}03 < Z < h/0{,}03) = 0{,}95$.
Donc $h/0{,}03 \approx 1{,}96$ (valeur usuelle pour 95 %)
$h \approx 1{,}96 \times 0{,}03 \approx 0{,}059 \approx 0{,}06$ (à 10^{-2} près)

h ≈ **0,06**

2. **2. Règle de décision du test**

On accepte H_0 au seuil de 5 % si la moyenne observée v appartient à l'intervalle [10 – h ; 10 + h] = [9,94 ; 10,06].

On accepte H_0 si $9{,}94 \le v \le 10{,}06$

Méthode : Rappel : pour un test bilatéral au seuil α, la région d'acceptation est centrée sur la moyenne théorique, largeur déterminée par la table de la loi normale.
Erreur fréquente : Prendre un intervalle unilatéral ou mal centrer l'intervalle.

3. **3. Décision pour v = 9,67 mL**

9,67 < 9,94, donc la valeur observée n'appartient pas à l'intervalle d'acceptation.
On rejette H_0 au seuil de 5 %.

On **rejette** H_0 au seuil de 5 %.

4. **4. Région d'acceptation au seuil de 1 %**

Au seuil de 1 %, l'intervalle est plus étroit : il correspond à environ ±2,58 × 0,03 = 0,077, donc [9,92 ; 10,08].
Parmi les propositions, seule D correspond à [9,92 ; 10,08].

Région d'acceptation : **D = [9,92 ; 10,08]**

Formulaire récapitulatif

- $y = a\,t + b$: équation d'ajustement affine
- $\ln(10{,}54 – C)$: transformation logarithmique pour linéariser une exponentielle
- $C(t) = 10{,}54 \times (1 – A\,e^{-r\,t})$: modèle exponentiel à saturation
- $y' + r\,y = b$: équation différentielle linéaire du premier ordre
- $P(a < X < b) = P((a – \mu)/\sigma < Z < (b – \mu)/\sigma)$: passage à la loi normale centrée réduite
- $X \sim B(n, p)$: loi binomiale, $E(X) = n \times p$
- C_{moy} = (1/T) ∫_{0}^{T} C(t) dt : concentration moyenne sur un intervalle
- h = z_{α/2} × σ : écart pour un test bilatéral au seuil α

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement les consignes** : repérez les unités, les arrondis demandés, et les méthodes attendues.
- **Soignez la rédaction et la justification de chaque étape** : expliquez vos calculs, citez les formules utilisées.
- **Vérifiez la cohérence des résultats** : un résultat négatif pour une concentration ou une probabilité supérieure à 1 indique une erreur.
- **Utilisez la calculatrice efficacement** : maîtrisez les fonctions statistiques (régression, loi normale, binomiale).
- **Relisez-vous** : repérez les erreurs de calcul, les oublis d’unités ou de justifications.