Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CRCI

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Conformité et durée de vie de produits (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrci.fr/assets/annales/bts-crci/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRCI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace à 20 m·s⁻¹ au début du freinage, puis sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle. L’exercice étudie cette vitesse par équation différentielle, analyse de fonction, calcul de distance parcourue et développement limité.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène (E₀) : y′ + 0,8y = 0.

La formule fournie indique que les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$. En prenant $a = 0,8$, on obtient toutes les solutions de (E_0), où la constante k est réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de (E) : y′ + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui est égal au second membre de (E). Cette égalité est vraie pour tout $t \geq 0$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant une solution particulière de (E) aux solutions de l’équation homogène associée. Avec $g(t) = 5$ et les solutions $ke^{-0,8t}$ de (E_0), on obtient l’ensemble des solutions de (E).

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale s’écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 15$, ce qui détermine la solution demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +$, on a $-0,8t \to -$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste égal à 5. Par somme, la limite de $f(t)$ est donc égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, et donner une équation de cette asymptote.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative C admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5 sans atteindre cette limite.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?**

Pour tout temps fini, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, mais ne devient jamais nulle. Selon ce modèle, le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans atteindre zéro.

Question 4. a. **Soit F définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Comme $(-18,75)(-0,8) = 15$, alors $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. **En utilisant d = ∫_tot_1 f(t)dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

Avec la primitive F, la distance vaut $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m. Au centimètre près, on arrondit la valeur numérique à deux décimales.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : parmi les trois propositions, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité régulier donné sur la page est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions, seule la troisième respecte cette forme du reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, d'après la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En reportant ces valeurs dans la formule, on obtient l'équation de la tangente.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Conformité et durée de vie de produits

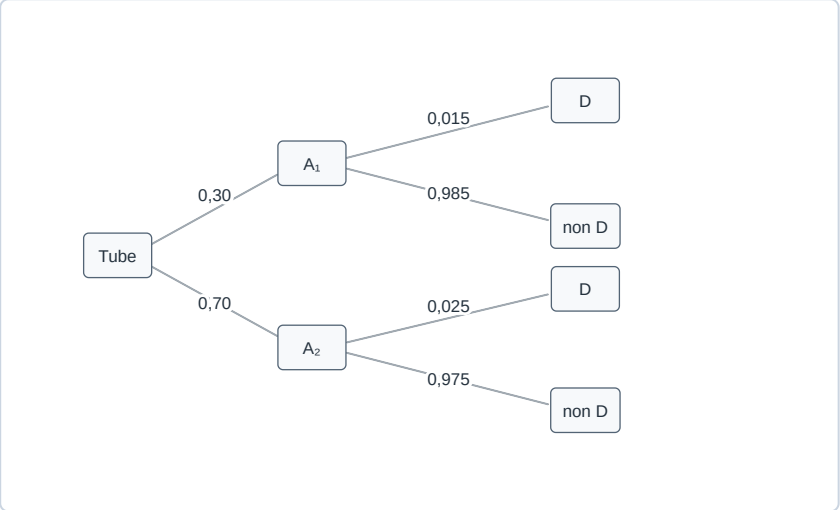
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, et des tests servent à étudier la présence de défauts. L'exercice porte aussi sur la durée de fonctionnement des tubes et sur l'estimation de la proportion de rivets conformes utilisés pour leur fixation.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation à partir des proportions de production des deux ateliers et de leurs probabilités de défaut.

La première bifurcation donne les proportions produites par chaque atelier. À partir de chaque atelier, on distingue les tubes avec défaut et sans défaut, en utilisant les probabilités conditionnelles indiquées dans l'énoncé.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les probabilités des branches issues de chaque atelier sont conditionnelles à cet atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré ci-dessous, avec les probabilités de chaque branche.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Le chemin correspondant à « atelier 1 et défaut » a pour probabilité le produit de la proportion issue de l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est égale à 0,022.**

Les deux chemins menant à un défaut sont ceux passant par les ateliers 1 et 2. Par la formule des probabilités totales :

$$P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité d'un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité d'absence de défaut vaut $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Donc, par la formule des probabilités conditionnelles, $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0{,}6825 / 0{,}978 \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$, l'espérance est $E(T) = 1/\lambda = 1/0{,}001 = 1\,000$ heures. En moyenne, un tube fluorescent fonctionne donc 1 000 heures avant de présenter une défaillance.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures.

Question 2. **Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La fonction de répartition d'une loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Ainsi, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$, soit $1{,}00$ au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$.

Question 3. **Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Par conséquent, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$, soit $0{,}00$ au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

Donnée	Calcul	Estimation
Rivets conformes	975 sur 1 000	$f = 975/1\,000 = 0{,}975$

La fréquence observée dans l'échantillon donne l'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes dans la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $p \approx 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %, puis arrondir ses bornes à 10^{-3} près.**

Avec la fréquence observée $f = 0{,}975$ et l'effectif $n = 1\,000$, la formule de l'énoncé donne :

$$\left[0{,}975 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}}\ ;\ 0{,}975 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}}\right].$$

Les bornes obtenues sont environ 0,965324 et 0,984676, puis arrondies au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2022, code 22MATGRB1, durée 2 heures, coefficient 2, sauf Traitement des matériaux : 3. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et le contrôle de produits industriels, en mobilisant équations différentielles, fonctions, intégration, probabilités conditionnelles, loi exponentielle et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$; pour un second membre constant, on ajoute une solution particulière.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale $y = 5$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est $[f - 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre pondéré, distinguer les proportions des ateliers des probabilités conditionnelles de défaut.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement connu et utiliser la probabilité correspondante au dénominateur.
- Vérifier le signe de la dérivée avant de dresser le tableau de variation sur $[0 ; +\infty[$.
- Respecter les arrondis demandés et les unités : temps en heures, vitesse en $m \cdot s^{-1}$ et distance en mètres.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, dont les solutions sont $ke^{-0,8t}$. Ajoutez une solution particulière constante pour le second membre 4, puis utilisez la condition $f(0) = 20$ pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube sans défaut provienne de l'atelier 2 ?

Calculez $P(A_2 \mid \text{non D}) = P(A_2 \cap \text{non D}) / P(\text{non D})$. Le numérateur combine la proportion de tubes issus de l'atelier 2 et la probabilité conditionnelle qu'un tube de cet atelier soit sans défaut.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, chacun avec des parties indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quelles consignes de présentation et de notation faut-il retenir ?

Justifiez les calculs lorsque la consigne demande de démontrer ou de vérifier, interprétez les résultats dans leur contexte et respectez les arrondis. Pour le QCM sur le développement limité, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrci.fr/assets/annales/bts-crci/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRCI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation en Chaudronnerie Industrielle : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.