Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS, Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrci.fr/assets/annales/bts-crci/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRCI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, un tableau présente de 2013 à 2021 les effectifs, en milliers, des personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles sont étudiés indépendamment : un ajustement exponentiel des données et une fonction définie à l'aide d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant y = ln(N - 30) pour les données fournies, avec des valeurs arrondies au millième.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = \ln(N_i - 30)$	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

On calcule chaque valeur avec $y_i = \ln(N_i - 30)$, en prenant N_i en milliers, puis on arrondit au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> y_i : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement des points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des points $(k_i ; y_i)$ donne une pente d'environ $0,079$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,261$. Après arrondi au centième, on obtient l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite obtenue, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, est modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

Comme $y = \ln(N - 30)$, l'équation arrondie donne $N - 30 = e^{3,26}e^{0,08k}$. Or $e^{3,26} \approx 26,05$. L'effectif N est exprimé en milliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes qui seront équipées de l'implant médical en 2026.**

En 2026, le rang est $k = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,70$ milliers, soit un arrondi au millier près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026, environ 104 000 personnes seront équipées.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, déterminer si le modèle étudié demeure valide et justifier la réponse.**

Quand $k \to +\infty$, $e^{0,08k} \to +\infty$. Le modèle prévoit donc un effectif sans limite, alors que le pays compte 60 millions d'habitants et que sa population reste stable.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : à long terme, le modèle prévoit un effectif supérieur à 60 millions.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène $y' + 0,05y = 0$ est de la forme $y' + ay = 0$. Ses solutions sur $[0;+[$ sont $y(t) = Ce^{-at}$, avec C réel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y(t) = c$, on a $y' = 0$. En remplaçant dans l'équation, $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

1. Une solution particulière de $y' + 0,05y = 0,05$ est la constante $y = 1$.

2. On ajoute à cette solution la solution générale de l'équation homogène.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **En utilisant la condition g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

Dans $g(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, la condition $g(0) = 8$ donne $1 + C = 8$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 7$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t désigne le nombre d'années écoulées depuis 2013 et f(t) un effectif en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.**

En 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Alors $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,684$ milliers. On arrondit au millier près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026, environ 97 000 personnes seront équipées.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0,05t} \to 0$. Le dénominateur de $f(t)$ tend vers 1 : la limite vaut donc 450 milliers de personnes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

Question 4. **À l'aide de l'expression fournie de f'(t), déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout $t \geq 0$, l'expression donnée $f'(t) = \dfrac{315e^{-0,05t}}{2(1 + 7e^{-0,05t})^2}$ est strictement positive. L'effectif prévu par le modèle augmente donc au cours du temps.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Question 5. **Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant médical dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

Résoudre $f(t) > 120$ conduit à $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, donc $t > \dfrac{-\ln(11/28)}{0{,}05} \approx 18{,}686$. Le premier rang annuel entier convenable est $t = 19$, soit l'année $2013 + 19$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le seuil de 120 000 personnes est dépassé à partir de 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est étudiée du point de vue de ses défauts d'approvisionnement et de ses pannes. Un laboratoire examine aussi le réglage du volume distribué à partir des mesures recueillies sur un échantillon de 100 bouteilles et d'un test bilatéral.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Associer chacune des quatre phrases numérotées du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite, repérée par une lettre : événements ou probabilités relatifs à la file d'entrée, au réservoir et au défaut d'approvisionnement. Écrire sur la copie le numéro et la lettre associés pour chaque réponse, sans justification.

Phrase	Information associée
1	E : 0,97
2	C : $A \cap \overline{B}$
3	F : 0,0006
4	D : 0,0494

La première phrase correspond à l'événement contraire de A. Pour la deuxième, la file est vide et le réservoir ne l'est pas. La troisième phrase décrit l'intersection de A et B, dont la probabilité se calcule par indépendance. Le défaut est l'union de ces événements : on additionne leurs probabilités et on soustrait celle de leur intersection.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine sur 200 jours

Question 1. La probabilité d'une panne un jour donné est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner sans justification la loi suivie par X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque journée est une épreuve de Bernoulli : la machine tombe en panne avec une probabilité constante de $0,025$. Les pannes des journées étant indépendantes, les 200 épreuves sont indépendantes. La variable X compte le nombre de succès, c'est-à-dire de journées avec panne, parmi ces 200 épreuves. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres 200 et $0,025$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0,025)$.

Question 2.a. **La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.**

1. Pour approcher une loi binomiale de paramètres n et p par une loi de Poisson, le paramètre est $\lambda = np$.
2. Dans cette situation, $n = 200$ et $p = 0,025$, donc $\lambda = 200 \times 0,025 = 5$. La loi de Poisson utilisée pour approcher la loi de X a bien pour paramètre 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 200 \times 0,025 = 5$.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie au millième.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités des valeurs entières de 0 à 10. Avec $P(Y = k) = e^{-5}\dfrac{5^k}{k!}$, on obtient $P(Y \leq 10) = e^{-5}\sum_{k=0}^{10}\dfrac{5^k}{k!}$. Le calcul donne environ $0,9863047$, soit $0,986$ au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0,986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour P(Y = k), déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

En remplaçant k par 15 dans la formule, on obtient $P(Y = 15) = \dfrac{5^{15}e^{-5}}{15!}$. Le numérateur et le dénominateur étant strictement positifs, cette probabilité est strictement positive. Elle vaut environ $0,000157$: sa très faible valeur explique qu'elle ne soit pas visible sur le graphique, mais elle n'est pas nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conjecture fausse : $P(Y = 15) \approx 0,000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir des effectifs de bouteilles contenant 73, 74, 75, 76 et 77 cL, déterminer à l'aide de la calculatrice la moyenne et l'écart type de l'échantillon de 100 bouteilles. Arrondir l'écart type au centième.**

Volume (cL)	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**
Effectif	17	20	43	13	7

La moyenne pondérée est $\bar{x} = \dfrac{17 \times 73 + 20 \times 74 + 43 \times 75 + 13 \times 76 + 7 \times 77}{100} = 74,73$. En utilisant les effectifs et en divisant la variance par 100, l'écart type de la série vaut environ $1,1032$ cL, soit $1,10$ cL au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 74,73 cL ; écart type : 1,10 cL.

Question 2.a. **Sous H₀ : m = 75, la moyenne Z d'un échantillon de 100 bouteilles suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) soit égal à 0,95, à 10^{-2} près.**

Sous H_0, Z suit une loi normale de moyenne 75 et d'écart type $0,11$. L'intervalle symétrique contenant 95 % des valeurs utilise le quantile $1,96$ de la loi normale centrée réduite. Ainsi, $h = 1,96 \times 0,11 = 0,2156$, soit $0,22$ à 10^{-2} près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,22$.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % portant sur H₀ : m = 75 et H₁ : m ≠ 75.**

Au seuil de confiance de 95 %, la région d'acceptation est l'intervalle centré en 75, de rayon $h \approx 0,22$. On compare la moyenne observée de l'échantillon à cet intervalle. Si elle appartient à l'intervalle, on accepte H_0 ; si elle est à l'extérieur, on rejette H_0. Les bornes, en cL, sont 74,78 et 75,22.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Accepter H_0 si $\bar{x} \in [74,78\,;\,75,22]$ cL ; sinon, la rejeter.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H₀ : m = 75 peut être acceptée selon le test défini.**

La moyenne de l'échantillon est $\bar{x} = 74,73$ cL. La région d'acceptation déterminée en 2.b est $[74,78\,;\,75,22]$ cL. Comme $74,73 < 74,78$, la moyenne observée est inférieure à la borne minimale et n'appartient pas à cet intervalle. Selon la règle du test bilatéral, l'hypothèse H_0 est donc rejetée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : on rejette H_0, car $74,73 < 74,78$ cL.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, dure deux heures. Son coefficient dépend de la spécialité : il va de 1 à 2. Elle étudie la modélisation de la diffusion d'un implant médical, puis les probabilités de défauts et de pannes d'une machine à embouteiller ainsi qu'un test statistique de conformité du volume rempli.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement y = ln(N - 30) transforme le modèle exponentiel en un ajustement affine entre y et le rang k.
- Pour résoudre y' + ay = c, on combine une solution particulière constante et les solutions de l'équation homogène associée.
- Pour n essais indépendants de probabilité p, le nombre de pannes suit une loi binomiale B(n, p), approchée ici par une loi de Poisson de paramètre np.
- Dans un test bilatéral normal à 95 %, l'intervalle de décision est centré sur la moyenne supposée et contient une probabilité de 0,95.

Points de vigilance & attentes du jury

- Garder à l'esprit que les effectifs de l'implant sont exprimés en milliers et que t compte les années depuis 2013.
- Respecter les arrondis demandés : millième pour le tableau, centième pour les coefficients et précisions indiquées pour les probabilités.
- Distinguer l'intersection de l'union des événements et exploiter leur indépendance pour calculer les probabilités.
- Pour le test bilatéral, comparer la moyenne observée aux bornes de l'intervalle puis formuler clairement la conclusion.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment choisir l'approximation de Poisson pour le nombre de pannes ?

Le nombre de pannes suit d'abord une loi binomiale B(n, p), car les jours sont indépendants. Ici, l'approximation de Poisson a pour paramètre $\lambda = np = 200 \times 0{,}025 = 5$, ce qui permet ensuite de calculer les probabilités demandées.

Q : La probabilité de 15 pannes peut-elle être exactement nulle ?

Non. Pour une loi de Poisson de paramètre 5, $P(Y = 15) = e^{-5} \times 5^{15}/15!$ est strictement positive. Le graphique peut seulement la représenter par une valeur très proche de zéro.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et plusieurs parties sont indépendantes. Repérez d'abord les questions accessibles, répartissez votre temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Comment conclure le test bilatéral à 95 % ?

Sous H_0, construisez l'intervalle de décision centré sur 75 à l'aide de h. Si la moyenne observée est dans l'intervalle, les résultats ne conduisent pas à rejeter H_0 ; sinon, ils conduisent à la rejeter au seuil du test.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrci.fr/assets/annales/bts-crci/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRCI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation en Chaudronnerie Industrielle : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.