Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**

2. **Série de Fourier d'une fonction paire périodique** (10 questions) — **Page 8**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrci.fr/assets/annales/bts-crci/E2 - Mathématiques/2023/BTS CRCI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, avec une vitesse initiale négative. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle, puis examine la limite, les variations, un algorithme de seuil et la position moyenne.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On identifie les coefficients de l'équation du second degré : $a = 1$, $b = 5$ et $c = 4$. Son discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$, donc il existe deux racines réelles distinctes. La formule du second degré donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On obtient ainsi les deux solutions de l'équation caractéristique.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. **À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.**

Les racines trouvées en 1.a sont réelles et distinctes. Le tableau fourni associe à chaque racine r_i un terme exponentiel $e^{r_i t}$. La solution générale est donc une combinaison linéaire des deux exponentielles correspondantes. Les constantes sont arbitraires à ce stade, car aucune condition initiale n'est imposée dans cette question. Elles pourront être déterminées ensuite à partir des valeurs de la fonction et de sa dérivée à l'instant initial.

La forme générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. **À partir de la position initiale du tiroir, égale à 20 cm, et de sa vitesse initiale, égale à -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).**

La fonction représente la distance OM, mesurée en centimètres, et sa dérivée représente la vitesse du point M, en $\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Les données initiales permettent donc de lire directement la valeur de la fonction et celle de sa dérivée à $t = 0$.

Grandeur à l'instant initial	Valeur
Distance OM	$20\ \mathrm{cm}$
Vitesse de M	$-10\ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Le signe négatif traduit le rapprochement du point M vers O.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(0) = 20\ \text{cm}$ et $f'(0) = -10\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance au bout de deux secondes s'obtient en évaluant l'expression donnée à $t = 2$. Dans le second terme, l'exposant $-4t$ devient -8. On conserve les coefficients exacts et les exponentielles afin de donner la valeur exacte demandée. L'approximation décimale ci-dessous sert seulement à situer cette distance dans le contexte du tiroir.

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}157.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \left(\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}\right)\ \text{cm} \approx 3{,}157\ \text{cm}.$

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme qu'il est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.**

On évalue la distance au bout de quatre secondes avec l'expression donnée. La fonction est continue, car elle est composée de fonctions exponentielles. Comme la distance vaut 20 cm à l'instant initial et moins de 0,5 cm à quatre secondes, le seuil de 0,5 cm a été atteint à un instant strictement compris entre 0 et 4 secondes.

- $f(0) = 20\ \text{cm} > 0{,}5\ \text{cm}$.
- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427\ \text{cm} < 0{,}5\ \text{cm}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui. Le tiroir atteint le seuil de fermeture avant 4 secondes, car $f(4) \approx 0{,}427\ \text{cm} < 0{,}5\ \text{cm}$.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent elles aussi vers $+\infty$. En appliquant la limite rappelée dans l'énoncé, on a donc $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. Les deux termes de l'expression de $f(t)$ tendent vers zéro ; leur différence tend donc également vers zéro.

$$f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de la fonction lorsque t tend vers $+\infty$ est finie. La courbe se rapproche donc d'une droite horizontale à cette extrémité. L'ordonnée de cette droite est égale à la limite obtenue en 1.a. Il s'agit d'une asymptote en $+\infty$, et non d'une affirmation sur l'intersection éventuelle de la courbe avec cette droite.

Une équation de l'asymptote horizontale est $y = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle en multipliant par la dérivée de son exposant : $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. Le second terme de f porte déjà un signe négatif ; sa dérivée devient donc positive. En appliquant également les coefficients de l'expression de f, on obtient :

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}, \qquad t \in [0; +\infty[.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée est strictement négative sur l'intervalle considéré ; la fonction est donc strictement décroissante. À l'origine, l'expression de f donne $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À l'autre extrémité, la limite déterminée en 1.a vaut zéro. Ces informations suffisent à compléter le tableau de variations sur tout l'intervalle.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 à 0 sur $[0; +\infty[$.

Partie B - Algorithme

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, au besoin en ajoutant des lignes, en indiquant les valeurs de f(t) arrondies au centième et le résultat du test, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque tour de boucle, la variable t augmente de $0{,}1$ seconde. La condition testée est exactement $f(t) > 0{,}5$. Elle reste vraie à $t = 3{,}8$, puis devient fausse à $t = 3{,}9$, ce qui met fin à la boucle. Les valeurs de $f(t)$ du tableau sont arrondies au centième, comme le demande l'énoncé.

Ligne	t	$f(t)$ **au centième**	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme s'arrête à $t = 3{,}9$, lorsque le test devient faux.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme commence à $t = 0$, puis augmente t d'un dixième de seconde tant que la distance reste strictement supérieure à 0,5 cm. Le test devient faux pour la première fois à $t = 3{,}9$, comme l'indique la dernière ligne du tableau précédent. La valeur finale correspond donc au premier pas de l'algorithme où le tiroir satisfait le critère de fermeture.

1. À $t = 3{,}8$, la distance dépasse encore le seuil.
2. À $t = 3{,}9$, la distance est inférieure au seuil.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé, car $f(3{,}9) < 0{,}5$ cm.

Partie B - Position moyenne

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de $f(t)$ est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On évalue cette primitive entre 0 et 4, puis on multiplie le résultat par $\frac{1}{4}$, conformément à la définition de la position moyenne :

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4.$$

Les termes constants donnent $\frac{1}{4}\left(\frac{70}{3} - \frac{5}{6}\right) = \frac{45}{8}$. Les deux termes exponentiels restants donnent les coefficients indiqués dans le résultat.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}\ \text{cm}.$$

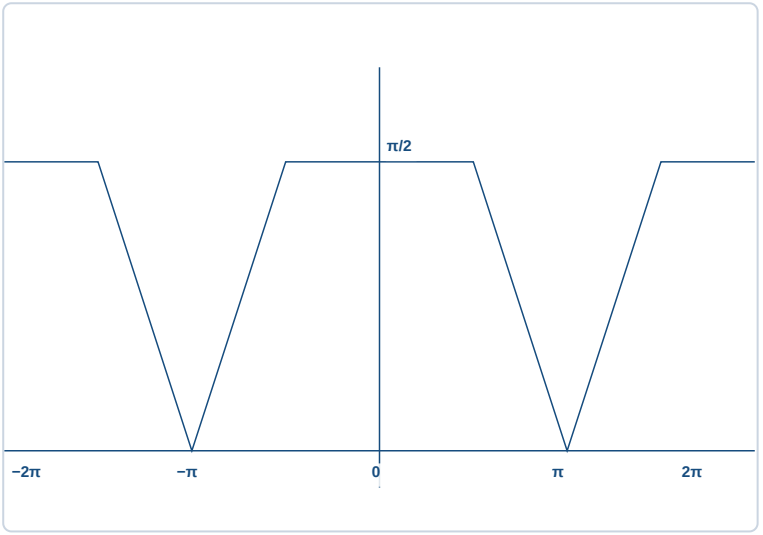
2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique

Une fonction paire de période 2π est définie par morceaux sur [0 ; π]. L'exercice demande d'en tracer le graphe, de déterminer ses coefficients de Fourier et une somme partielle, puis d'identifier sa courbe et d'estimer l'erreur d'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition, sa périodicité et sa parité.

Sur \,$[-\pi;\pi]$, la fonction est paire : elle vaut $\pi/2$ sur $[-\pi/2;\pi/2]$, puis décroît linéairement jusqu'à 0 en π, avec le prolongement symétrique à gauche. On répète ce motif par périodes de 2π. Sur l'intervalle demandé, les zéros sont en $-\pi$ et π, et les plateaux ont pour hauteur $\pi/2$.

Graphe de f sur [−2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe périodique de période 2π, pair, avec zéros en $\pm\pi$ et plateaux de hauteur $\pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le coefficient b_n est proportionnel à l'intégrale de $f(t)\sin(nt)$ sur une période. Comme f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, leur produit est impair. L'intégrale d'une fonction impaire sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est nulle. Ce résultat vaut pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation et la période sont liées par $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Le sujet donne $T = 2\pi$. En substituant cette valeur, on obtient $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$, en radians par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi]$, l'aire sous la courbe est un rectangle et un triangle : $\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{8}$. Par périodicité, l'aire sur une période vaut deux fois cette aire. Ainsi, $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare à $t = \pi/2$, où l'expression de f change, puis on substitue ses deux expressions.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En admettant que a_n = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On applique $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1, 2, 3$, les différences de cosinus valent respectivement $1, -2, 1$. En tenant compte du facteur $2/(\pi n^2)$, on obtient les trois coefficients exacts ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des coefficients obtenus que s_3(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) - (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n étant nuls, il reste les termes en cosinus. En remplaçant a_0, a_1, a_2, a_3 par les valeurs établies, on obtient l'expression demandée.

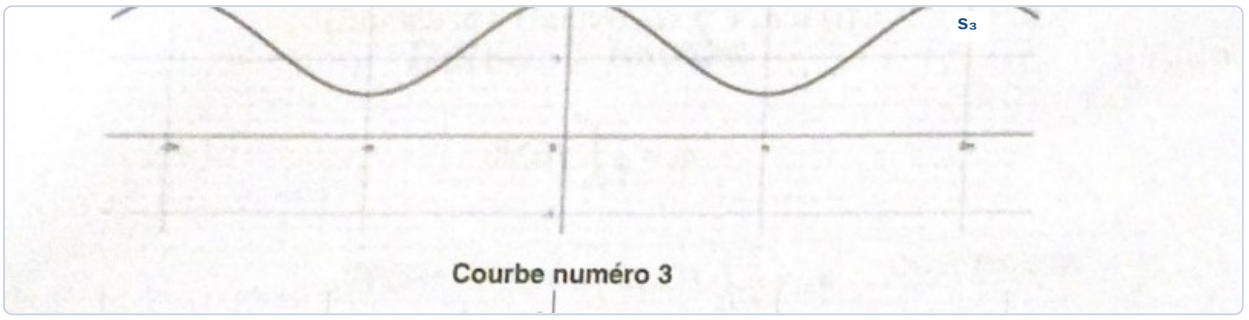
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La courbe correspondant à la somme partielle est la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On substitue les coefficients exacts dans $P = (a_0)^2 + \frac{1}{2}[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Ainsi, $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}[(2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2]$. En arrondissant au dix-millième, on obtient la valeur demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. La valeur efficace F vérifie $F^2 = \pi^2/6$ et P constitue une approximation de F^2. Choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est attendue, sans justification.

Le pourcentage d'erreur relatif est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. En utilisant la valeur non arrondie de P obtenue à la question précédente et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, l'erreur vaut environ $0{,}0739\,\%$. Parmi les choix proposés, la réponse correspondante est $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis la série de Fourier d'une fonction périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- L'équation caractéristique de $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La distance du tiroir est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, en centimètres.
- La période T et la pulsation ω vérifient $\omega = 2\pi/T$; ici, $T = 2\pi$.
- Pour une fonction paire, $b_n = 0$ et a_n se calcule sur une demi-période avec le facteur 4/T.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f est en centimètres, t en secondes et la vitesse initiale est négative.
- Pour la fermeture, comparer la distance au seuil strict de 0,5 cm.
- Dans l'algorithme, tester la condition après chaque incrément et distinguer la dernière valeur testée de la valeur finale de t.
- Pour Fourier, exploiter la parité et la définition par morceaux ; lire précisément les axes des courbes proposées.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution. On utilise ensuite les conditions initiales f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Les coefficients de sinus b_n s'annulent ainsi pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment suivre l'algorithme de fermeture du tiroir sans erreur ?

On initialise t à 0, puis on teste si f(t) est supérieur à 0,5. Tant que le test est vrai, on ajoute 0,1 à t et on recommence. L'algorithme s'arrête au premier test faux.

Q : Quelles consignes de notation faut-il respecter pour le choix multiple ?

À la question 9.b, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée. Selon l'énoncé, une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrci.fr/assets/annales/bts-crci/E2 - Mathématiques/2023/BTS CRCI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation en Chaudronnerie Industrielle : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.